

Mathématiques – Seconde

Corrigé détaillé des exercices

M. Fall – Professeur de Mathématiques

Cours particuliers – Classe de Seconde

Corrections des exercices d'entraînement et d'approfondissement

Table des matières

1	Vocabulaire ensembliste et logique	3
2	Nombres et calculs – Arithmétique	5
3	Nombres réels et calcul algébrique	6
4	Géométrie – Vecteurs	9
5	Géométrie – Droites du plan	10
6	Fonctions – Représentations	12
7	Fonctions – Variations et extremums	15
8	Statistiques et information chiffrée	17
9	Probabilités	19
10	Algorithmique et programmation Python	21
11	Synthèse – Problèmes mixtes	23

1 Vocabulaire ensembliste et logique

Correction – Exercice 1

On considère les intervalles

$$A = [-3; 5] \quad \text{et} \quad B =]1; 8[.$$

L'intersection correspond aux nombres appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B =]1; 5].$$

L'union correspond aux nombres appartenant à au moins un des deux intervalles :

$$A \cup B = [-3; 8[.$$

On a :

$$2 \in A, \quad 7 \notin A.$$

Si

$$C = \{-3; 0; 2; 7\},$$

alors

$$C \not\subset A$$

car

$$7 \notin A.$$

Enfin,

$$A \cap C = \{-3; 0; 2\}$$

et

$$B \cap C = \{2; 7\}.$$

Correction – Exercice 2

La négation de

$$x > 2 \text{ et } x \leq 7$$

est

$$x \leq 2 \text{ ou } x > 7.$$

En effet, la négation de " P et Q " est "non P ou non Q ".

La négation de

"un entier est pair ou multiple de 3"

est

$$\text{"il n'est pas pair et il n'est pas multiple de 3"}.$$

La négation de

"Tous les élèves ont une note supérieure ou égale à 10"

est

$$\text{"Il existe au moins un élève ayant une note strictement inférieure à 10."}$$

Considérons maintenant l'implication :

$$x^2 > 9 \implies x > 3.$$

Cette implication est fausse.

En effet, pour

$$x = -4,$$

on a

$$x^2 = 16 > 9,$$

mais

$$-4 > 3$$

est faux.

Ainsi, $x = -4$ constitue un contre-exemple.

Correction – Approfondissement : Raisonnement

On considère

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Factorisons :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Ainsi,

$$(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Donc

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Dans les deux cas,

$$x \in [2; 3].$$

L'implication

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x \in [2; 3]$$

est donc vraie.

En revanche, la réciproque est fausse.

Prenons par exemple

$$x = \frac{5}{2}.$$

On a bien

$$\frac{5}{2} \in [2; 3],$$

mais

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Donc la réciproque est fausse.

2 Nombres et calculs – Arithmétique

Correction – Exercice 3

Décomposons 756 en facteurs premiers :

$$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7.$$

De même,

$$990 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11.$$

Les facteurs premiers communs avec les plus petits exposants sont

$$2 \times 3^2.$$

Donc

$$\boxed{\text{PGCD}(756, 990) = 18}.$$

Simplifions maintenant :

$$\frac{756}{990}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par 18 :

$$\frac{756}{990} = \frac{42}{55}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{756}{990} = \frac{42}{55}}.$$

Correction – Exercice 4

On décompose :

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$$

Ses diviseurs positifs sont :

$$\boxed{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84}.$$

Étudions maintenant 221.

On a

$$\sqrt{221} \approx 14,9.$$

Il suffit donc de tester les nombres premiers

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Or

$$221 = 13 \times 17.$$

Donc

$$\boxed{221 \text{ n'est pas premier}}.$$

Enfin :

$$12 = 2^2 \times 3,$$

$$18 = 2 \times 3^2,$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5.$$

Le PPCM est obtenu en prenant les plus grands exposants :

$$\text{PPCM}(12, 18, 30) = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Donc

$$\boxed{\text{PPCM}(12, 18, 30) = 180}.$$

Correction – Approfondissement : Arithmétique

On veut constituer le plus grand nombre possible de lots identiques avec 168 feuilles bleues et 252 feuilles blanches.

On cherche donc

$$\text{PGCD}(168, 252).$$

Décomposons :

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7,$$

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7.$$

Ainsi,

$$\text{PGCD}(168, 252) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84.$$

On peut donc fabriquer

$$\boxed{84 \text{ lots}}.$$

Chaque lot contient

$$\frac{168}{84} = 2$$

feuilles bleues et

$$\frac{252}{84} = 3$$

feuilles blanches.

Donc chaque lot contient

$$\boxed{2 \text{ feuilles bleues et } 3 \text{ feuilles blanches}}.$$

3 Nombres réels et calcul algébrique

Correction – Exercice 5

Calculons

$$A = \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12}.$$

On utilise le dénominateur commun 12 :

$$A = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} + \frac{7}{12}.$$

Donc

$$A = \frac{9 - 10 + 7}{12} = \frac{6}{12}.$$

Ainsi,

$$\boxed{A = \frac{1}{2}}.$$

Pour

$$B = 2^5 \times 4^{-2} \times 8,$$

on écrit tout comme puissance de 2 :

$$4^{-2} = (2^2)^{-2} = 2^{-4}$$

et

$$8 = 2^3.$$

Donc

$$B = 2^5 \times 2^{-4} \times 2^3 = 2^{5-4+3} = 2^4.$$

Ainsi,

$$\boxed{B = 16}.$$

Enfin,

$$C = (\sqrt{9})^2 - \sqrt{25}.$$

Donc

$$C = 9 - 5.$$

Ainsi,

$$\boxed{C = 4}.$$

Correction – Exercice 6

Développons

$$E = (2x - 3)^2 - (x^2 - 1).$$

On a

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

Donc

$$E = 4x^2 - 12x + 9 - x^2 + 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{E = 3x^2 - 12x + 10}.$$

Factorisons

$$F = 9x^2 - 25.$$

C'est une différence de deux carrés :

$$F = (3x)^2 - 5^2.$$

Donc

$$\boxed{F = (3x - 5)(3x + 5)}.$$

Si

$$F = 0,$$

alors

$$3x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 5 = 0.$$

Donc

$$\boxed{x = \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{3}}.$$

Enfin,

$$G = 4x^2 - 12x.$$

Le facteur commun est $4x$:

$$\boxed{G = 4x(x - 3)}.$$

Correction – Exercice 7

Réolvons

$$3(2x - 1) - 5 = 4x + 6.$$

Développons :

$$6x - 3 - 5 = 4x + 6.$$

Donc

$$6x - 8 = 4x + 6.$$

Ainsi,

$$2x = 14,$$

d'où

$$\boxed{x = 7}.$$

Réolvons ensuite

$$3(2x - 3) = 5(x + 4).$$

On développe :

$$6x - 9 = 5x + 20.$$

Donc

$$\boxed{x = 29}.$$

Réolvons enfin :

$$5 - 2x \leq 3x + 10.$$

On regroupe :

$$-5 \leq 5x.$$

Donc

$$x \geq -1.$$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = [-1; +\infty[}.$$

Correction – Approfondissement : Distance et valeur absolue

Réolvons

$$|2x - 3| \leq 5.$$

On utilise :

$$|u| \leq a \iff -a \leq u \leq a.$$

Donc

$$-5 \leq 2x - 3 \leq 5.$$

On ajoute 3 :

$$-2 \leq 2x \leq 8.$$

Puis on divise par 2 :

$$-1 \leq x \leq 4.$$

Ainsi,

$$\boxed{S = [-1; 4]}.$$

On peut aussi écrire

$$|2x - 3| = 2 \left| x - \frac{3}{2} \right|.$$

L'inégalité devient

$$\left| x - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{5}{2}.$$

Cela signifie que la distance entre x et $\frac{3}{2}$ est inférieure ou égale à $\frac{5}{2}$.

Réolvons maintenant

$$|x + 1| > 3.$$

On obtient

$$x + 1 < -3 \quad \text{ou} \quad x + 1 > 3.$$

Donc

$$x < -4 \quad \text{ou} \quad x > 2.$$

Ainsi,

$$S =] -\infty; -4[\cup]2; +\infty[.$$

4 Géométrie – Vecteurs

Correction – Exercice 8

On considère

$$A(-2; 1), \quad B(4; 3), \quad C(1; 7).$$

Calculons :

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-2); 3 - 1) = (6; 2).$$

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (6; 2)}.$$

De même :

$$\overrightarrow{AC} = (1 - (-2); 7 - 1) = (3; 6).$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = (3; 6)}.$$

La distance AB vaut :

$$AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Donc

$$\boxed{AB = 2\sqrt{10}}.$$

De même :

$$AC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Donc

$$\boxed{AC = 3\sqrt{5}}.$$

Le milieu I de $[BC]$ a pour coordonnées :

$$I \left(\frac{4+1}{2}; \frac{3+7}{2} \right).$$

Ainsi,

$$\boxed{I \left(\frac{5}{2}; 5 \right)}.$$

Correction – Exercice 9

Dans un parallélogramme $ABCD$:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

On a

$$\overrightarrow{BC} = (2; -3).$$

Si

$$A(1; 2),$$

alors

$$D = A + \overrightarrow{BC}.$$

Donc

$$D(1 + 2; 2 - 3).$$

Ainsi,

$$\boxed{D(3; -1)}.$$

On peut vérifier que

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.$$

Correction – Approfondissement : Alignement et paramètre

On a

$$\overrightarrow{AB} = (4; 6)$$

et

$$\overrightarrow{AM} = (t - 1; 2t - 1).$$

Les points A , B et M sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
On utilise le déterminant :

$$4(2t - 1) - 6(t - 1) = 0.$$

Développons :

$$8t - 4 - 6t + 6 = 0.$$

Donc

$$2t + 2 = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{t = -1}.$$

5 Géométrie – Droites du plan**Correction – Exercice 10**

La droite passe par

$$A(-1; 4) \quad \text{et} \quad B(3; -2).$$

Son coefficient directeur est

$$m = \frac{-2 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

L'équation est donc de la forme

$$y = -\frac{3}{2}x + b.$$

Comme $A(-1; 4)$ appartient à la droite :

$$4 = -\frac{3}{2}(-1) + b.$$

Donc

$$4 = \frac{3}{2} + b.$$

Ainsi,

$$b = \frac{5}{2}.$$

L'équation de la droite est

$$\boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}}.$$

Pour $x = 5$:

$$y = -\frac{3}{2} \times 5 + \frac{5}{2} = -\frac{15}{2} + \frac{5}{2} = -5.$$

Donc le point

$$C(5; -5)$$

appartient bien à la droite.

Correction – Exercice 11

On résout le système :

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$y = x - 2.$$

On remplace dans la seconde :

$$2x + (x - 2) = 7.$$

Donc

$$3x - 2 = 7.$$

Ainsi,

$$3x = 9$$

et

$$x = 3.$$

Alors

$$y = 3 - 2 = 1.$$

La solution est

$$\boxed{(x; y) = (3; 1)}.$$

Les deux droites se coupent donc au point

$$\boxed{I(3; 1)}.$$

Correction – Approfondissement : Parallélisme et intersection

Pour que la droite d_m soit parallèle à Δ , leurs coefficients directeurs doivent être égaux.

On obtient :

$$m - 1 = 2.$$

Donc

$$\boxed{m = 3}.$$

Pour

$$m = 0,$$

on obtient la droite

$$d_0 : y = -x.$$

Cherchons son intersection avec

$$y = 2x - 3.$$

On résout :

$$-x = 2x - 3.$$

Donc

$$-3x = -3,$$

d'où

$$x = 1.$$

Alors

$$y = -1.$$

Le point d'intersection est donc

$$\boxed{I(1; -1)}.$$

6 Fonctions – Représentations**Correction – Exercice 12**

On considère

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

Calculons :

$$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 1 = 6.$$

Donc

$$\boxed{f(-1) = 6}.$$

De même :

$$f(0) = 1.$$

Donc

$$\boxed{f(0) = 1}.$$

Enfin :

$$f(3) = 9 - 12 + 1 = -2.$$

Donc

$$\boxed{f(3) = -2}.$$

Cherchons les antécédents de 1 :

$$f(x) = 1.$$

Donc

$$x^2 - 4x + 1 = 1.$$

Ainsi,

$$x^2 - 4x = 0.$$

On factorise :

$$x(x - 4) = 0.$$

Donc

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4}.$$

Enfin :

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

On complète le carré :

$$f(x) = (x - 2)^2 - 3.$$

Comme

$$(x - 2)^2 \geq 0,$$

on a

$$f(x) \geq -3.$$

Ainsi, le minimum de f est

$$\boxed{-3},$$

atteint pour

$$\boxed{x = 2}.$$

Correction – Exercice 13

La fonction

$$x \mapsto x^2$$

est définie sur

$$\boxed{\mathbb{R}}.$$

La fonction

$$x \mapsto x^3$$

est également définie sur

$$\boxed{\mathbb{R}}.$$

La fonction

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

est définie lorsque

$$x \geq 0.$$

Son domaine est donc

$$\boxed{[0; +\infty[}.$$

Enfin,

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est définie lorsque

$$x \neq 0.$$

Son domaine est donc

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pour $x = 4$:

$$4^2 = 16, \quad 4^3 = 64, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Pour $x = -2$:

$$(-2)^2 = 4, \quad (-2)^3 = -8,$$

mais

$$\sqrt{-2}$$

n'est pas définie dans $\mathbb{R}$, et

$$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Pour

$$x = \frac{1}{4},$$

on obtient :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1/4} = 4.$$

Correction – Approfondissement : Modélisation

Un rectangle possède un périmètre de 40 cm.

Si un côté mesure x , l'autre mesure

$$20 - x.$$

L'aire est donc

$$A(x) = x(20 - x).$$

Ainsi,

$$A(x) = -x^2 + 20x.$$

Le domaine géométrique est

$$0 < x < 20.$$

Mettons A sous forme canonique :

$$A(x) = -(x^2 - 20x).$$

Or

$$x^2 - 20x = (x - 10)^2 - 100.$$

Donc

$$A(x) = -(x - 10)^2 + 100.$$

Ainsi,

$$A(x) = -(x - 10)^2 + 100.$$

Comme

$$(x - 10)^2 \geq 0,$$

on a

$$A(x) \leq 100.$$

L'aire maximale est donc

$$100 \text{ cm}^2,$$

atteinte pour

$$x = 10.$$

Le rectangle est alors un carré de dimensions

$$10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}.$$

7 Fonctions – Variations et extremums

Correction – Exercice 14

D'après le tableau de variations, la fonction décroît de 5 à -2 lorsque x varie de -4 à 1.

Puis elle croît de -2 à 4 lorsque x varie de 1 à 6.

Ainsi, le minimum de la fonction est

$$-2,$$

atteint pour

$$x = 1.$$

Comme

$$-2 < 0$$

et que la fonction est décroissante sur $[-4; 1]$, on obtient

$$f(-2) > f(0).$$

En revanche, -2 et 4 n'appartiennent pas au même intervalle de monotonie.

On ne peut donc pas comparer $f(-2)$ et $f(4)$ uniquement avec le tableau de variations.

Correction – Exercice 15

On considère

$$g(x) = -2x + 7.$$

Son coefficient directeur est

$$-2 < 0.$$

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Réolvons

$$g(x) > 1.$$

Cela donne

$$-2x + 7 > 1.$$

Donc

$$-2x > -6.$$

En divisant par -2 , on change le sens de l'inégalité :

$$x < 3.$$

Ainsi,

$$S =]-\infty; 3[.$$

Cherchons maintenant l'intersection avec l'axe des abscisses :

$$-2x + 7 = 0.$$

Donc

$$x = \frac{7}{2}.$$

Le point d'intersection avec l'axe des abscisses est

$$\left(\frac{7}{2}; 0\right).$$

Correction – Approfondissement : Optimisation

On considère

$$h(x) = (x - 3)^2 + 2$$

sur

$$[-1; 7].$$

La quantité

$$(x - 3)^2$$

diminue lorsque x se rapproche de 3, puis augmente lorsque x s'éloigne de 3.

Ainsi, h est décroissante sur

$$[-1; 3]$$

puis croissante sur

$$[3; 7].$$

Le minimum est atteint pour $x = 3$:

$$h(3) = 2.$$

Donc

$$\min h = 2.$$

Aux extrémités :

$$h(-1) = (-4)^2 + 2 = 18,$$

$$h(7) = 4^2 + 2 = 18.$$

Donc le maximum sur $[-1; 7]$ vaut

$$\boxed{18}.$$

Réolvons enfin

$$h(x) \leq 6.$$

On a

$$(x - 3)^2 + 2 \leq 6.$$

Donc

$$(x - 3)^2 \leq 4.$$

Ainsi,

$$-2 \leq x - 3 \leq 2.$$

Donc

$$1 \leq x \leq 5.$$

Finalement,

$$\boxed{S = [1; 5]}.$$

8 Statistiques et information chiffrée

Correction – Exercice 16

La série ordonnée comporte 12 valeurs.

Son effectif total est donc

$$\boxed{n = 12}.$$

La somme des valeurs vaut

$$138.$$

La moyenne est donc

$$\bar{x} = \frac{138}{12} = 11,5.$$

Ainsi,

$$\boxed{\bar{x} = 11,5}.$$

Comme l'effectif est pair, la médiane est la moyenne des sixième et septième valeurs :

$$M_e = \frac{10 + 11}{2}.$$

Donc

$$\boxed{M_e = 10,5}.$$

Avec la définition par rang utilisée au lycée, le premier quartile est la troisième valeur :

$$\boxed{Q_1 = 8}.$$

Le troisième quartile est la neuvième valeur :

$$\boxed{Q_3 = 13}.$$

L'écart interquartile vaut

$$Q_3 - Q_1 = 13 - 8 = 5.$$

Ainsi,

$$Q_3 - Q_1 = 5.$$

Correction – Exercice 17

Le prix initial est

80 euros.

Après une hausse de 12 % :

$$80 \times 1,12 = 89,60.$$

Le nouveau prix est donc

89,60 euros.

On applique ensuite une baisse de 12 % :

$$89,60 \times 0,88 = 78,848.$$

Soit, au centime près :

$$78,85 \text{ euros}.$$

Le coefficient multiplicateur global vaut

$$1,12 \times 0,88 = 0,9856.$$

La variation globale est donc

$$0,9856 - 1 = -0,0144.$$

Cela correspond à une baisse de

$$1,44 \%.$$

Une hausse de 12 % suivie d'une baisse de 12 % ne s'annule donc pas.

Correction – Approfondissement : Tableau croisé

Il y a 240 élèves au total, dont 150 filles.

Le nombre de garçons est donc

$$240 - 150 = 90.$$

Ainsi,

$$90 \text{ garçons}.$$

Pour le sport collectif :

90 filles

et

54 garçons.

Le total est donc

$$90 + 54 = 144.$$

Pour le sport non collectif :

$$150 - 90 = 60$$

filles et

$$90 - 54 = 36$$

garçons.

Le total est

$$60 + 36 = 96.$$

La proportion d'élèves pratiquant un sport collectif est

$$\frac{144}{240} = 0,60.$$

Donc

$$\boxed{60\%}.$$

Chez les filles :

$$\frac{90}{150} = 0,60.$$

Donc

$$\boxed{60\%}.$$

Chez les garçons :

$$\frac{54}{90} = 0,60.$$

Donc

$$\boxed{60\%}.$$

Les trois proportions sont donc identiques.

9 Probabilités

Correction – Exercice 18

On lance un dé équilibré à six faces.

L'univers est

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Si A est l'événement "obtenir un nombre pair", alors

$$A = \{2; 4; 6\}.$$

Si B est l'événement "obtenir un nombre supérieur ou égal à 4", alors

$$B = \{4; 5; 6\}.$$

Ainsi,

$$A \cap B = \{4; 6\},$$

$$A \cup B = \{2; 4; 5; 6\},$$

et

$$\overline{A} = \{1; 3; 5\}.$$

Comme les six issues sont équiprobables :

$$P(A) = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3},$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3},$$

et

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{2}.$$

Correction – Exercice 19

L'urne contient :

5 boules rouges,

3 boules bleues,

2 boules vertes.

Le nombre total de boules est

$$5 + 3 + 2 = 10.$$

Ainsi,

$$P(R) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$P(R) = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$P(B) = \frac{3}{10}$$

et

$$P(V) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Donc

$$P(V) = \frac{1}{5}.$$

La probabilité de ne pas obtenir une boule bleue est

$$1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

Ainsi,

$$P(\overline{B}) = \frac{7}{10}.$$

Correction – Approfondissement : Deux épreuves

On lance deux fois une pièce équilibrée.

On note P pour pile et F pour face.

L'univers est

$$\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}.$$

Les quatre issues sont équiprobables.

L'événement "exactement un pile" est

$$\{(P, F), (F, P)\}.$$

Donc

$$P(\text{exactement un pile}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

L'événement "au moins un pile" est

$$\{(P, P), (P, F), (F, P)\}.$$

Donc

$$P(\text{au moins un pile}) = \frac{3}{4}.$$

L'événement "deux résultats identiques" est

$$\{(P, P), (F, F)\}.$$

Donc

$$P(\text{deux résultats identiques}) = \frac{1}{2}.$$

Enfin, "exactement un pile" et "obtenir deux résultats différents" correspondent au même événement :

$$\{(P, F), (F, P)\}.$$

10 Algorithmique et programmation Python

Correction – Exercice 20

Le programme calcule d'abord

$$y = 3x - 5,$$

puis renvoie la valeur absolue de y .

Pour

$$x = 4,$$

on obtient

$$y = 3 \times 4 - 5 = 7.$$

Le programme renvoie donc

$$\boxed{7}.$$

Pour

$$x = -2,$$

on obtient

$$y = 3(-2) - 5 = -11.$$

La valeur absolue de -11 est 11 .

Le programme renvoie donc

$$\boxed{11}.$$

La fonction calculée par le programme est

$$\boxed{f(x) = |3x - 5|}.$$

Correction – Exercice 21

Une fonction Python permettant de tester si n est un multiple de k est :

```
def est_multiple(n, k):
    return n % k == 0
```

Pour afficher les multiples de 7 compris entre 1 et 100 :

```
for n in range(1, 101):
    if est_multiple(n, 7):
        print(n)
```

Le symbole % donne le reste de la division euclidienne.
Ainsi,

$$n \% k == 0$$

signifie que le reste de la division de n par k est nul.

Correction – Approfondissement : Simulation

Voici un programme simulant n lancers d'un dé et calculant la fréquence d'apparition du nombre 6 :

```
from random import randint

def frequence_six(n):
    compteur = 0

    for i in range(n):
        resultat = randint(1, 6)

        if resultat == 6:
```

```
compteur = compteur + 1
```

```
return compteur / n
```

Lorsque n devient grand, la fréquence obtenue tend à se stabiliser autour de

$$\boxed{\frac{1}{6}}.$$

Pour étudier la fréquence d'apparition d'un nombre pair, on peut utiliser :

```
from random import randint
```

```
def frequence_pair(n):
```

```
    compteur = 0
```

```
    for i in range(n):
```

```
        resultat = randint(1, 6)
```

```
        if resultat % 2 == 0:
```

```
            compteur = compteur + 1
```

```
    return compteur / n
```

Les nombres pairs possibles sont

2, 4, 6.

La probabilité théorique est donc

$$\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

11 Synthèse – Problèmes mixtes

Correction – Exercice 22

Le prix d'une course de taxi est modélisé par

$$P(x) = 4,5 + 1,8x,$$

où x représente la distance parcourue en kilomètres.

Pour une course de 12 km :

$$P(12) = 4,5 + 1,8 \times 12.$$

Donc

$$P(12) = 4,5 + 21,6 = 26,1.$$

Ainsi,

$$\boxed{P(12) = 26,10 \text{ euros}}.$$

Cherchons maintenant la distance correspondant à un prix de 31,50 euros :

$$4,5 + 1,8x = 31,5.$$

Donc

$$1,8x = 27.$$

Ainsi,

$$x = \frac{27}{1,8} = 15.$$

Donc

$$\boxed{x = 15 \text{ km}}.$$

Dans l'expression

$$P(x) = 4,5 + 1,8x,$$

le nombre 1,8 représente le prix payé par kilomètre.

Le nombre 4,5 représente la prise en charge initiale.

Correction – Approfondissement : Problème de synthèse

On considère les points

$$A(0; 6) \quad \text{et} \quad B(8; 0).$$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$m = \frac{0 - 6}{8 - 0} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

Comme la droite passe par $A(0; 6)$, son équation est

$$\boxed{y = -\frac{3}{4}x + 6}.$$

Si un point N de cette droite a pour abscisse x , son ordonnée vaut

$$6 - \frac{3}{4}x.$$

L'aire étudiée est donc

$$\mathcal{A}(x) = x \left(6 - \frac{3}{4}x \right).$$

En développant :

$$\mathcal{A}(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2.$$

Donc

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x.$$

Mettons cette expression sous forme canonique :

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{3}{4}(x^2 - 8x).$$

Or

$$x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16.$$

Ainsi,

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{3}{4} \left[(x - 4)^2 - 16 \right].$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = -\frac{3}{4}(x - 4)^2 + 12}.$$

Comme

$$(x - 4)^2 \geq 0,$$

on a

$$-\frac{3}{4}(x - 4)^2 \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{A}(x) \leq 12.$$

L'aire maximale vaut donc

$$\boxed{12}$$

unités d'aire.

Elle est atteinte pour

$$\boxed{x = 4}.$$