

Mathématiques – Première

Spécialité mathématiques – Corrigé détaillé

M. Fall – Professeur de Mathématiques
Cours particuliers – Classe de Première

Table des matières

1	Vocabulaire ensembliste et logique	2
2	Suites numériques – Modèles discrets	2
3	Second degré	2
4	Dérivation	3
5	Variations et courbes représentatives	4
6	Fonction exponentielle	4
7	Trigonométrie	5
8	Calcul vectoriel et produit scalaire	5
9	Géométrie repérée	6
10	Probabilités conditionnelles et indépendance	6
11	Variables aléatoires réelles	7
12	Expérimentations et simulation	7
13	Algorithmique, programmation et listes	8
14	Automatismes – Synthèse	9

1 Vocabulaire ensembliste et logique

Correction – Exercice 1

$A \cap B =]1; 5]$ et $A \cup B = [-2; 8[$. De plus $A \cap C = \{-2, 0, 3\}$ et $B \cap C = \{3, 7\}$. Enfin $C \not\subset A$, car $7 \in C$ mais $7 \notin A$.

Correction – Exercice 2

a) La négation est : “Il existe un réel x tel que $x^2 + 1 \leq 0$ ”. b) La négation est : “Pour tout entier naturel n , $n^2 \neq 50$ ”. c) La négation de l’implication est : “ $x > 2$ et $x^2 \leq 4$ ”. La réciproque est $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$; elle est fausse, par exemple pour $x = -3$. La contraposée est $x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$.

Correction – Approfondissement : Raisonnement

La contraposée de “si n^2 est impair alors n est impair” est : “si n est pair alors n^2 est pair”. Si $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, donc n^2 est pair. La contraposée étant vraie, la proposition initiale est vraie.

2 Suites numériques – Modèles discrets

Correction – Exercice 3

$u_0 = 5$, $u_5 = 20$ et $u_{20} = 65$. De plus

$$u_{n+1} - u_n = [5 + 3(n+1)] - (5 + 3n) = 3,$$

donc (u_n) est arithmétique de raison 3. Enfin $5 + 3n \geq 80 \iff n \geq 25$. Le premier rang est 25.

Correction – Exercice 4

$v_0 = 12000$ et $v_1 = 12000 \times 1,04 = 12480$. Une hausse annuelle de 4% donne

$$v_{n+1} = 1,04v_n, \quad v_n = 12000 \times 1,04^n.$$

Ainsi $v_8 \approx 12000 \times 1,04^8 \approx 16423$ individus.

Correction – Approfondissement : Suite définie par récurrence

On obtient $w_0 = 2$, $w_1 = 4,6$, $w_2 = 6,68$, $w_3 = 8,344$, $w_4 = 9,6752$, $w_5 = 10,74016$. La suite semble croissante et tendre vers 15, solution de $L = 0,8L + 3$.

```
w = 2
n = 0
while abs(w - 15) >= 1e-3:
    w = 0.8*w + 3
    n = n + 1
print(n)
```

3 Second degré

Correction – Exercice 5

$$(x - 3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5 = f(x).$$

Puis

$$f(x) = (x - 3)^2 - 2^2 = (x - 5)(x - 1).$$

Les racines sont 1 et 5. Comme le coefficient de x^2 est positif, $f(x) > 0$ sur $] -\infty; 1[\cup]5; +\infty[$, $f(x) = 0$ en 1 et 5, et $f(x) < 0$ sur $]1; 5[$.

Correction – Exercice 6

$$(x - 4)(2x + 3) = 0 \iff x = 4 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.$$

Pour $(x - 2)(x + 5) \leq 0$, les racines sont -5 et 2 et le produit est négatif entre elles :

$$x \in [-5; 2].$$

Correction – Approfondissement : Optimisation quadratique

Les côtés valent x et $20 - x$, donc

$$A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x = -(x - 10)^2 + 100, \quad 0 < x < 20.$$

Ainsi $A(x) \leq 100$. L'aire maximale vaut 100 cm^2 , pour $x = 10$.

4 Dérivation

Correction – Exercice 7

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

Donc $f'(0) = 2$ et $f'(2) = 2$. Comme $f(0) = -5$, la tangente en 0 a pour équation

$$y = 2x - 5.$$

Correction – Exercice 8

Avec $u = 2x + 1$ et $v = x - 3$,

$$g'(x) = \frac{2(x - 3) - (2x + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{-7}{(x - 3)^2}.$$

Pour $x \neq 3$, le dénominateur est strictement positif, donc $g'(x) < 0$.

Correction – Approfondissement : Nombre dérivé

Pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$$

Quand h tend vers 0, cette expression tend vers $2a$. Donc $f'(a) = 2a$.

5 Variations et courbes représentatives

Correction – Exercice 9

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

f' est positif sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et négatif sur $] -1; 1[$. Ainsi f croît puis décroît puis croît. On a $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$: maximum local 2 en -1 , minimum local -2 en 1 .

Correction – Exercice 10

$$h'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}.$$

Sur $]0; +\infty[$, $h' < 0$ sur $]0; 2[$, $h'(2) = 0$, puis $h' > 0$ sur $]2; +\infty[$. Le minimum est donc

$$\boxed{h(2) = 4}.$$

Correction – Approfondissement : Problème d'optimisation

Les dimensions sont $20 - 2x$, $20 - 2x$ et x , avec $0 < x < 10$:

$$V(x) = x(20 - 2x)^2 = 4x(10 - x)^2.$$

On obtient

$$V'(x) = 4(10 - x)(10 - 3x).$$

Sur $]0; 10[$, le volume croît jusqu'à $x = 10/3$, puis décroît. Le maximum est

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{16000}{27} \approx 592,6 \text{ cm}^3.$$

6 Fonction exponentielle

Correction – Exercice 11

$$e^2 e^5 = e^7, \quad \frac{e^7}{e^3} = e^4, \quad e^{-2} e^5 = e^3, \quad (e^3)^4 = e^{12}.$$

Par injectivité de l'exponentielle :

$$e^x = e^4 \iff x = 4, \quad e^{2x-1} = e^5 \iff 2x-1 = 5 \iff x = 3.$$

Correction – Exercice 12

$$f'(x) = e^x - 2.$$

$f'(x) = 0$ lorsque $e^x = 2$, c'est-à-dire $x = \ln 2$. Ainsi f décroît sur $] -\infty; \ln 2]$ puis croît sur $[\ln 2; +\infty[$.

Correction – Approfondissement : Modèle exponentiel

$Q(0) = 500$ et $Q(10) = 500e^{0,3} \approx 674,9$.

$$Q'(t) = 15e^{0,03t}.$$

Ainsi $Q'(10) = 15e^{0,3} \approx 20,25$: au temps 10, le modèle croît instantanément d'environ 20,25 unités par an.

7 Trigonométrie

Correction – Exercice 13

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \pi = -1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Correction – Exercice 14

Sur $[0; 2\pi[$:

$$\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3}.$$

Et

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4}.$$

Correction – Approfondissement : Équation trigonométrique

Posons $X = \cos x$:

$$2X^2 - 3X + 1 = (2X - 1)(X - 1) = 0.$$

Donc $\cos x = 1/2$ ou $\cos x = 1$. Sur $[0; 2\pi[$:

$$x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

8 Calcul vectoriel et produit scalaire

Correction – Exercice 15

$$\overrightarrow{AB} = (4; 2), \quad \overrightarrow{AC} = (1; 4).$$

Donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + 2 \times 4 = 12 > 0.$$

Ainsi l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

Correction – Exercice 16

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 60^\circ = 5 \times 7 \times \frac{1}{2} = \frac{35}{2}.$$

Puis

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ = 25 + 49 - 35 = 39.$$

Donc $BC = \sqrt{39}$.

Correction – Approfondissement : Orthogonalité

$$\overrightarrow{AB} = (4; 3), \quad \overrightarrow{AC} = (6; y - 2).$$

La perpendicularité équivaut à

$$4 \times 6 + 3(y - 2) = 0.$$

Donc $24 + 3y - 6 = 0$, soit $3y = -18$, d'où $y = -6$.

9 Géométrie repérée

Correction – Exercice 17

Une équation est $3x + 2y + c = 0$. Comme $A(2; -1)$ appartient à la droite : $6 - 2 + c = 0$, donc $c = -4$. Ainsi

$$3x + 2y - 4 = 0.$$

Pour $B(4; -4)$: $12 - 8 - 4 = 0$, donc B appartient à la droite.

Correction – Exercice 18

Le système est

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

En additionnant : $3x = 3$, donc $x = 1$, puis $y = 5$. Le point d'intersection est $(1; 5)$.

Correction – Approfondissement : Cercle

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y - 12 = 0$$

donne

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Le centre est $(3; -2)$ et le rayon 5 . Sur l'axe des abscisses, $y = 0$:

$$(x - 3)^2 + 4 = 25 \iff (x - 3)^2 = 21.$$

Les points sont $(3 - \sqrt{21}; 0)$ et $(3 + \sqrt{21}; 0)$.

10 Probabilités conditionnelles et indépendance

Correction – Exercice 19

$P(S) = 0,60$ et $P_S(N) = 0,30$. Donc

$$P(S \cap N) = P(S)P_S(N) = 0,60 \times 0,30 = 0,18.$$

Correction – Exercice 20

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5,$$

$$P_B(A) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4.$$

Comme $P(A \cap B) = 0,2 = 0,4 \times 0,5 = P(A)P(B)$, les événements sont indépendants.

Correction – Approfondissement : Arbre pondéré

$$P(D) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,029.$$

Donc la probabilité d'un défaut est $2,9\%$. Puis

$$P_D(M_2) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,029} = \frac{15}{29} \approx 0,517.$$

11 Variables aléatoires réelles

Correction – Exercice 21

$X = 5$ avec probabilité $1/6$, $X = 2$ avec probabilité $2/6 = 1/3$, et $X = -1$ avec probabilité $3/6 = 1/2$. Ainsi

$$E(X) = 5\frac{1}{6} + 2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \boxed{1}.$$

Correction – Exercice 22

$$E(X) = -2(0,2) + 1(0,5) + 4(0,3) = 1,3.$$

$$E(X^2) = 4(0,2) + 1(0,5) + 16(0,3) = 6,1.$$

Donc

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6,1 - 1,3^2 = \boxed{4,41},$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{4,41} = \boxed{2,1}.$$

Correction – Approfondissement : Jeu équitable

Les gains bruts ont pour espérance

$$8 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} = 3,5.$$

Le gain net moyen est $3,5 - c$. Pour un jeu équitable, il doit être nul :

$$\boxed{c = 3,50 \text{ euros}}.$$

12 Expérimentations et simulation

Correction – Exercice 23

```
from random import randint
```

```
def frequence_pile(n):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        if randint(0, 1) == 1:
            compteur += 1
    return compteur / n
```

Pour de grandes valeurs de n , la fréquence est généralement proche de $1/2$.

Correction – Exercice 24

```
from random import randint
```

```
compteur = 0
N = 10000
for i in range(N):
    s = randint(1, 6) + randint(1, 6)
    if s == 7:
        compteur += 1
```

```
print(compteur / N)
```

La valeur obtenue doit être proche de la probabilité théorique $6/36 = 1/6$.

Correction – Approfondissement : Fluctuation expérimentale

```
from random import randint

def frequence_7(n):
    c = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 6) + randint(1, 6) == 7:
            c += 1
    return c / n

L = []
for k in range(100):
    L.append(frequence_7(200))

print(min(L), max(L), sum(L)/len(L))
```

Les fréquences fluctuent d'un échantillon à l'autre ; leur moyenne est généralement proche de $1/6$.

13 Algorithmique, programmation et listes

Correction – Exercice 25

```
L = [3, 7, 2, 9, 5]
L.append(11)
L.remove(2)
print(L[2])
print(sum(L))
```

Après les deux modifications, $L = [3, 7, 9, 5, 11]$; le troisième élément est 9 et la somme vaut 35.

Correction – Exercice 26

```
def maximum(L):
    m = L[0]
    for x in L:
        if x > m:
            m = x
    return m
```

Correction – Approfondissement : Recherche de seuil

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1000
    while u < 1500:
        u = 1.03*u
        n += 1
    return n
```

Le programme étudie la suite géométrique $u_n = 1000 \times 1,03^n$ et cherche le premier rang où $u_n \geq$

1500.

14 Automatismes – Synthèse

Correction – Exercice 27

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{5}{6} &= \frac{19}{12}, & 1,2 \times 0,5 &= 0,6, \\ (2x-3)^2 &= 4x^2 - 12x + 9, & x^2 - 9 &= (x-3)(x+3), \\ \frac{2^7}{2^3} &= 2^4 = 16.\end{aligned}$$

Correction – Exercice 28

Le coefficient global est

$$1,15 \times 0,90 = 1,035,$$

soit une hausse globale de $\boxed{3,5\%}$. Pour une hausse de 25%, le coefficient est 1,25. Le coefficient réciproque est $1/1,25 = 0,8$, soit une baisse de $\boxed{20\%}$.

Correction – Approfondissement : Problème de synthèse

$$B'(x) = -3x^2 + 24x - 27 = -3(x^2 - 8x + 9).$$

Les racines sont

$$x = 4 - \sqrt{7}, \quad x = 4 + \sqrt{7}.$$

Comme le coefficient dominant de B' est négatif, B' est négatif avant $4 - \sqrt{7}$, positif entre les deux racines, puis négatif après $4 + \sqrt{7}$. Sur $[0; 10]$, le maximum est donc à comparer notamment en $x = 4 + \sqrt{7}$ et aux bornes. On trouve

$$B(4 + \sqrt{7}) = 42 + 14\sqrt{7} \approx 79,04,$$

contre $B(0) = -10$ et $B(10) = -80$. Le bénéfice maximal est donc d'environ $\boxed{79,04 \text{ milliers d'euros}}$.

def B(x):

```
    return -x**3 + 12*x**2 - 27*x - 10
```

```
L = []
```

```
for k in range(101):
```

```
    x = k/10
```

```
    L.append((x, B(x)))
```

```
print(max(L, key=lambda p: p[1]))
```