

# Mathématiques – Première

Spécialité mathématiques – Cahier d'exercices

M. Fall – Professeur de Mathématiques  
Cours particuliers – Classe de Première

*Entraînement de niveau moyen et exercices d'approfondissement*

## Table des matières

|    |                                              |   |
|----|----------------------------------------------|---|
| 1  | Vocabulaire ensembliste et logique           | 2 |
| 2  | Suites numériques – Modèles discrets         | 2 |
| 3  | Second degré                                 | 3 |
| 4  | Dérivation                                   | 3 |
| 5  | Variations et courbes représentatives        | 3 |
| 6  | Fonction exponentielle                       | 4 |
| 7  | Trigonométrie                                | 4 |
| 8  | Calcul vectoriel et produit scalaire         | 5 |
| 9  | Géométrie repérée                            | 5 |
| 10 | Probabilités conditionnelles et indépendance | 5 |
| 11 | Variables aléatoires réelles                 | 6 |
| 12 | Expérimentations et simulation               | 6 |
| 13 | Algorithmique, programmation et listes       | 6 |
| 14 | Automatismes – Synthèse                      | 7 |

## 1 Vocabulaire ensembliste et logique

### Entraînement – Exercice 1

Soient  $A = [-2; 5]$ ,  $B = ]1; 8[$  et  $C = \{-2, 0, 3, 7\}$ .

- Déterminer  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .
- Déterminer  $A \cap C$  et  $B \cap C$ .
- Dire si  $C \subset A$  et justifier.

### Entraînement – Exercice 2

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

- Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 > 0$ .
- Il existe un entier naturel  $n$  tel que  $n^2 = 50$ .
- Si  $x > 2$ , alors  $x^2 > 4$ .

Donner ensuite la réciproque et la contraposée de la troisième proposition.

### Approfondissement – Raisonnement

Montrer par contraposée que, pour tout entier  $n$ , si  $n^2$  est impair alors  $n$  est impair. Expliquer précisément les différentes étapes du raisonnement.

## 2 Suites numériques – Modèles discrets

### Entraînement – Exercice 3

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 5 + 3n$ .

- Calculer  $u_0$ ,  $u_5$  et  $u_{20}$ .
- Montrer que  $(u_n)$  est arithmétique et préciser sa raison.
- Déterminer le premier rang  $n$  pour lequel  $u_n \geq 80$ .

### Entraînement – Exercice 4

Une population de 12 000 individus augmente de 4% par an. On note  $v_n$  la population après  $n$  années.

- Donner  $v_0$  et  $v_1$ .
- Exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .
- Donner une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- Estimer la population après 8 ans.

### Approfondissement – Suite définie par récurrence

On pose  $w_0 = 2$  et  $w_{n+1} = 0,8w_n + 3$ . Calculer les six premiers termes. Conjecturer le sens de variation et une valeur vers laquelle la suite semble se rapprocher. Écrire un programme Python qui calcule le premier rang où  $|w_n - 15| < 10^{-3}$ .

### 3 Second degré

#### Entraînement – Exercice 5

Soit  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ .

- Vérifier que  $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ .
- Factoriser  $f(x)$ .
- Résoudre  $f(x) = 0$ .
- Étudier le signe de  $f(x)$ .

#### Entraînement – Exercice 6

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$(x - 4)(2x + 3) = 0, \quad (x - 2)(x + 5) \leq 0.$$

#### Approfondissement – Optimisation quadratique

Un rectangle a un périmètre de 40 cm. On note  $x$  la longueur d'un côté. Exprimer son aire  $A(x)$ , déterminer son domaine de définition géométrique et trouver l'aire maximale.

### 4 Dérivation

#### Entraînement – Exercice 7

Pour  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$  :

- Calculer  $f'(x)$ .
- Calculer  $f'(0)$  et  $f'(2)$ .
- Donner l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0.

#### Entraînement – Exercice 8

Soit  $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . Calculer  $g'(x)$  et étudier son signe.

#### Approfondissement – Nombre dérivé

À partir de la définition du taux d'accroissement, démontrer que la fonction  $f(x) = x^2$  est dérivable en tout réel  $a$  et que  $f'(a) = 2a$ .

### 5 Variations et courbes représentatives

#### Entraînement – Exercice 9

Soit  $f(x) = x^3 - 3x$ .

- Calculer  $f'(x)$ .
- Étudier le signe de  $f'(x)$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Déterminer les extremums locaux.

**Entraînement – Exercice 10**

Soit  $h(x) = x + \frac{4}{x}$  sur  $]0; +\infty[$ . Étudier les variations de  $h$  et déterminer son minimum.

**Approfondissement – Problème d'optimisation**

On fabrique une boîte sans couvercle à partir d'un carré de carton de côté 20 cm en découpant aux quatre coins des carrés de côté  $x$ , puis en relevant les bords. Exprimer le volume  $V(x)$ , préciser l'intervalle de définition et utiliser la dérivation pour rechercher le volume maximal.

**6 Fonction exponentielle****Entraînement – Exercice 11**

Simplifier :

$$e^2 e^5, \quad \frac{e^7}{e^3}, \quad e^{-2} e^5, \quad (e^3)^4.$$

Puis résoudre :

$$e^x = e^4, \quad e^{2x-1} = e^5.$$

**Entraînement – Exercice 12**

Soit  $f(x) = e^x - 2x$ .

- Calculer  $f'(x)$ .
- Étudier le signe de  $f'(x)$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$ .

**Approfondissement – Modèle exponentiel**

Une quantité est modélisée par  $Q(t) = 500e^{0,03t}$ , où  $t$  est exprimé en années. Calculer  $Q(0)$  et  $Q(10)$ . Déterminer le taux de croissance instantané  $Q'(t)$  et interpréter  $Q'(10)$ .

**7 Trigonométrie****Entraînement – Exercice 13**

Sur le cercle trigonométrique, donner les valeurs exactes de

$$\cos(0), \sin(0), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos(\pi), \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

**Entraînement – Exercice 14**

Résoudre sur  $[0; 2\pi[$  :

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Approfondissement – Équation trigonométrique**

Résoudre sur  $[0; 2\pi[$  l'équation

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0.$$

## 8 Calcul vectoriel et produit scalaire

### Entraînement – Exercice 15

Dans un repère orthonormé, on donne  $A(1; 2)$ ,  $B(5; 4)$  et  $C(2; 6)$ .

- Calculer  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- En déduire la nature de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

### Entraînement – Exercice 16

Dans un triangle  $ABC$ , on sait que  $AB = 5$ ,  $AC = 7$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  puis la longueur  $BC$ .

### Approfondissement – Orthogonalité

On donne  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; 5)$  et  $C(5; y)$ . Déterminer  $y$  pour que les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  soient perpendiculaires.

## 9 Géométrie repérée

### Entraînement – Exercice 17

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par  $A(2; -1)$  et de vecteur normal  $\vec{n} = (3; 2)$ . Vérifier si  $B(4; -4)$  appartient à cette droite.

### Entraînement – Exercice 18

On considère les droites

$$d_1 : 2x - y + 3 = 0, \quad d_2 : x + y - 6 = 0.$$

Déterminer leur point d'intersection.

### Approfondissement – Cercle

Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

Déterminer ensuite ses points d'intersection avec l'axe des abscisses.

## 10 Probabilités conditionnelles et indépendance

### Entraînement – Exercice 19

Dans une population, 60% des personnes pratiquent un sport. Parmi elles, 30% pratiquent la natation. On choisit une personne au hasard.

- Traduire les données avec des événements  $S$  et  $N$ .
- Calculer  $P(S \cap N)$ .

**Entraînement – Exercice 20**

On donne  $P(A) = 0,4$ ,  $P(B) = 0,5$  et  $P(A \cap B) = 0,2$ . Calculer  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ . Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

**Approfondissement – Arbre pondéré**

Une entreprise utilise deux machines  $M_1$  et  $M_2$ .  $M_1$  fabrique 70% des pièces et  $M_2$  les autres. Le taux de défaut est de 2% pour  $M_1$  et de 5% pour  $M_2$ . Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse puis, sachant qu'elle est défectueuse, la probabilité qu'elle provienne de  $M_2$ .

## 11 Variables aléatoires réelles

**Entraînement – Exercice 21**

On lance un dé équilibré. Le gain  $X$  vaut 5 euros si le résultat est 6, 2 euros si le résultat est pair mais différent de 6, et  $-1$  euro sinon. Déterminer la loi de  $X$  et calculer son espérance.

**Entraînement – Exercice 22**

Une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs  $-2$ ,  $1$  et  $4$  avec probabilités respectives  $0,2$ ,  $0,5$  et  $0,3$ . Calculer  $E(X)$ ,  $E(X^2)$ , la variance  $V(X)$  et l'écart-type  $\sigma(X)$ .

**Approfondissement – Jeu équitable**

Un jeu coûte  $c$  euros. On lance deux pièces équilibrées. Le joueur reçoit 8 euros s'il obtient deux piles, 3 euros s'il obtient exactement un pile et rien sinon. Déterminer  $c$  pour que le jeu soit équitable.

## 12 Expérimentations et simulation

**Entraînement – Exercice 23**

Écrire un programme Python simulant  $n$  lancers d'une pièce équilibrée et renvoyant la fréquence de pile.

**Entraînement – Exercice 24**

Écrire un programme Python simulant 10 000 réalisations de la somme de deux dés équilibrés et estimant la probabilité d'obtenir une somme égale à 7.

**Approfondissement – Fluctuation expérimentale**

Modifier le programme précédent pour répéter 100 fois une expérience de 200 lancers et stocker dans une liste les 100 fréquences obtenues. Calculer la fréquence minimale, maximale et moyenne.

## 13 Algorithmique, programmation et listes

**Entraînement – Exercice 25**

Soit la liste Python

```
L = [3, 7, 2, 9, 5]
```

Écrire des instructions permettant d'ajouter 11, de supprimer 2, d'afficher le troisième élément et de calculer la somme des éléments.

**Entraînement – Exercice 26**

Écrire une fonction Python qui prend une liste de nombres en argument et renvoie son maximum sans utiliser la fonction `max`.

**Approfondissement – Recherche de seuil**

Écrire une fonction Python qui détermine le plus petit entier  $n$  tel que

$$1000 \times 1,03^n \geq 1500.$$

Relier le programme à une suite géométrique.

**14 Automatismes – Synthèse****Entraînement – Exercice 27**

Effectuer sans calculatrice :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6}, \quad 1,2 \times 0,5, \quad (2x - 3)^2, \quad x^2 - 9, \quad \frac{2^7}{2^3}.$$

**Entraînement – Exercice 28**

Un prix augmente de 15% puis diminue de 10%. Déterminer le coefficient multiplicateur global et le taux d'évolution global. Déterminer aussi le taux réciproque d'une hausse de 25%.

**Approfondissement – Problème de synthèse**

Une entreprise produit  $x$  centaines d'objets, avec  $x \in [0; 10]$ . Son bénéfice, en milliers d'euros, est

$$B(x) = -x^3 + 12x^2 - 27x - 10.$$

- Calculer  $B'(x)$  et factoriser cette dérivée.
- Étudier les variations de  $B$  sur  $[0; 10]$ .
- Déterminer le bénéfice maximal.
- Écrire un programme Python qui produit une table de valeurs de  $B$  avec un pas de 0,1 et vérifie numériquement le résultat.